

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد للبكالوريا

مادة الرياضيات الدورة العادية 2014

Svt - pc



إعداد وإنجاز : الأستاذ أضر ضرور مصطفى

www.facebook.com/jaime.maath

التمرين الأول

1أ- بين أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 2 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ومنه فإن :

$$= (0+2)\vec{i} - (1+0)\vec{j} + (-2+0)\vec{k}$$

يعني :

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

إذن :

و بما أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A و B و C غير مستقيمية أي أنها تكون مسوى (ABC)

ب- بين أن $2x - y - 2z + 5 = 0$ هي المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (2, -1, -2)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

و لدينا المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على الشكل : $ax + by + cz + d = 0$

ومنه فإن : $(ABC) : 2x - y - 2z + d = 0$

لنحدد العدد d (نختار إحدى النقط A أو B أو C)

لدينا $C(0, 5, 0)$ يعني $2 \times 0 - 5 - 2 \times 0 + d = 0$ يعني $-5 + d = 0$ ومنه $d = 5$

وبالتالي : $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$

2أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2, 0, 0)$ و شعاعها هو 3

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 0y + 0z - 5 = 0$$

$$\Omega(2, 0, 0) \text{ هو المركز هو } \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-4}{-2} = 2 \\ b = \frac{0}{-2} = 0 \\ c = \frac{0}{-2} = 0 \\ d = -5 \end{array} \right. \text{ يعني :}$$

$$\text{و لدينا } r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4 + 0 + 0 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

لدينا : $\Omega(2, 0, 0)$ و $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2x_\Omega - y_\Omega - 2z_\Omega + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|4 + 5|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3 = r$$

إذن :

و منه المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

ج- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $\Omega(2,0,0)$ و العمودي على المستوى (ABC)
 إذن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ هو التمثيل البارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

و لدينا عند التعويض في معادلة المستوى $2(2+2t)+t+4t+5=0$
 يعني $4+4t+t+4t+5=0$ يعني $9+9t=0$ يعني $t=-1$ و منه
 إذن بعد التعويض في التمثيل البارامتري نجد أن $H(0,1,2)$

التمرين الثاني

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

لدينا : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$ و منه $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 2 - 8 = -6$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

و بمأن $\Delta < 0$ فإن للمعادلة حلين هما

$$= \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} \quad \text{أو} \quad = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$$

(2) أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $\text{Arg}(u) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

لدينا : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ و منه $|u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$

يعني : $u = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{3} \right]$

إذن : $\begin{cases} |u| = \sqrt{2} \\ \text{Arg}(u) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي بين أن u^6 عدد حقيقي

لدينا : $u = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$

يعني أن : $u^6 = \left[\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right]^6 = \sqrt{2}^6 \left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) \right) = 8(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$

و منه : $u^6 = 8(1+i0) = 8$ و بالتالي العدد u^6 عدد حقيقي

(3) أ- عبر عن Z' بدلالة Z

لدينا حسب التمثيل العقدي للدوران $z' - w = e^{i\theta} (z - w)$

$$z' - o = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - o) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \text{ و منه}$$

ب- تحقق أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي أضلاع

$$\text{لدينا : } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - i4\sqrt{3}) \Leftrightarrow b = 2 - i2\sqrt{3} + i2\sqrt{3} + 6 \Leftrightarrow b = 8 \text{ يعني}$$

و بالتالي فإن B صورة A بالدوران R

بما أن $OA = OB$ و $\widehat{(OB, OA)} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ حسب تعريف الدوران فإن المثلث OAB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث

(1) بين بالترجع أن $u_n < 14$ لكل n من $\mathbb{N}$

أساس التراجع :

من أجل $n=0$ يعني $u_0 = 13$ و منه $u_0 < 14$ عبارة صحيحة

فرضية التراجع

نفترض أن $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 14$

و لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < 14$

$$\text{لدينا } u_n < 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 7 < 14 \Leftrightarrow u_{n+1} < 14$$

نتيجة

لكل n من $\mathbb{N}$ فإن $u_n < 14$

(2) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أكتب v_n بدلالة n

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = 14 - u_{n+1} = 14 - \left(\frac{1}{2}u_n + 7\right) = 14 - \frac{1}{2}u_n - 7 = 7 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(14 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول هو $v_0 = 14 - u_0 = 14 - 13 = 1$

$$\text{لدينا حسب علاقة الحد العام لمتتالية هندسية } v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ب- استنتج أن $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

$$\text{لدينا : } v_n = 14 - u_n \Leftrightarrow u_n = 14 - v_n \Leftrightarrow u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{و منه : } -1 < \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 14$$

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 133,99$

$$u_n > 13,99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99 - 14 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n > -0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0,01) \Leftrightarrow -n \ln(2) < \ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{-\ln(2)} \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow n > 6,64 \Leftrightarrow n > 7$$

إذن أصغر قيمة يتخذها العدد الصحيح الطبيعي n هي 7

التمرين الرابع

-نسحب من الكيس و في ان واحد بیدقتين

0			
0	0	1	1
0	0	1	1

1- نحسب كون الإمكانات Ω يعني $Card(\Omega) = C_9^2 = 36$

الحدث A "مجموع العددين اللذين تحملهما البيدقتين يساوي 1"

$$p(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{36} = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \quad \text{لدينا :}$$

الحدث B "إحتمال فوز سعيد إذا سحب بیدقتين تحمل كل منهما العدد 1"

$$p(B) = \frac{C_4^2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{لدينا :}$$

الحدث C "احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط"

هناك عدة طرق يمكنك إستعمالها للإجابة على هذا السؤال و من بين هاته الطرق قانون الحدانية

$$p(C) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = \frac{5}{72} \quad \text{إذن :}$$

المسألة

الجزء الأول:

(1) بين أن $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0, +\infty[$

$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)' = \frac{(x^2)'}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

و منه $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$ أي أن الدالة g تزايدية على المجال $]0, +\infty[$

(2) تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0, 1[$ و أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		0	

$$\text{لدينا : } g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \text{و منه}$$

إذن حسب جدول التغيرات لدينا : $\forall x \in [1, +\infty[; g(x) \geq 0$ و $\forall x \in]0, 1[; g(x) \leq 0$

الجزء الثاني:

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسياً النتيجة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln(x)) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{لدينا}$$

و منه المستقيم ذو المعادلــــــــــــة $x=0$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

2-أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x)) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty : \text{ لدينا}$$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty \quad \text{و} \quad t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \quad : \text{نضع}$$

و منه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(t^2))^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2\ln(t))^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2\ln(t)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{2\ln(t)}{t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 \quad : \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \text{ولدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (γ_f) بجوار $+\infty$

إذن المنحنى (ζ_f) يقبل فرع شلجمي إتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

(3)-أ- بين أن لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $[0, 1]$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

لدينا :

$$f'(x) = \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right)' = 2(1 + \ln(x))'(1 + \ln(x)) - \frac{2x}{x^4} = 2 \cdot \frac{1}{x}(1 + \ln(x)) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} \left(1 + \ln(x) - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \text{إذن}$$

و بما أن $g(x) \leq 0$; $\forall x \in]0,1]$ فإن $f'(x) \leq 0$ أي أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$

و بما أن $g(x) \geq 0$; $\forall x \in [1,+\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ أي أن الدالة f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

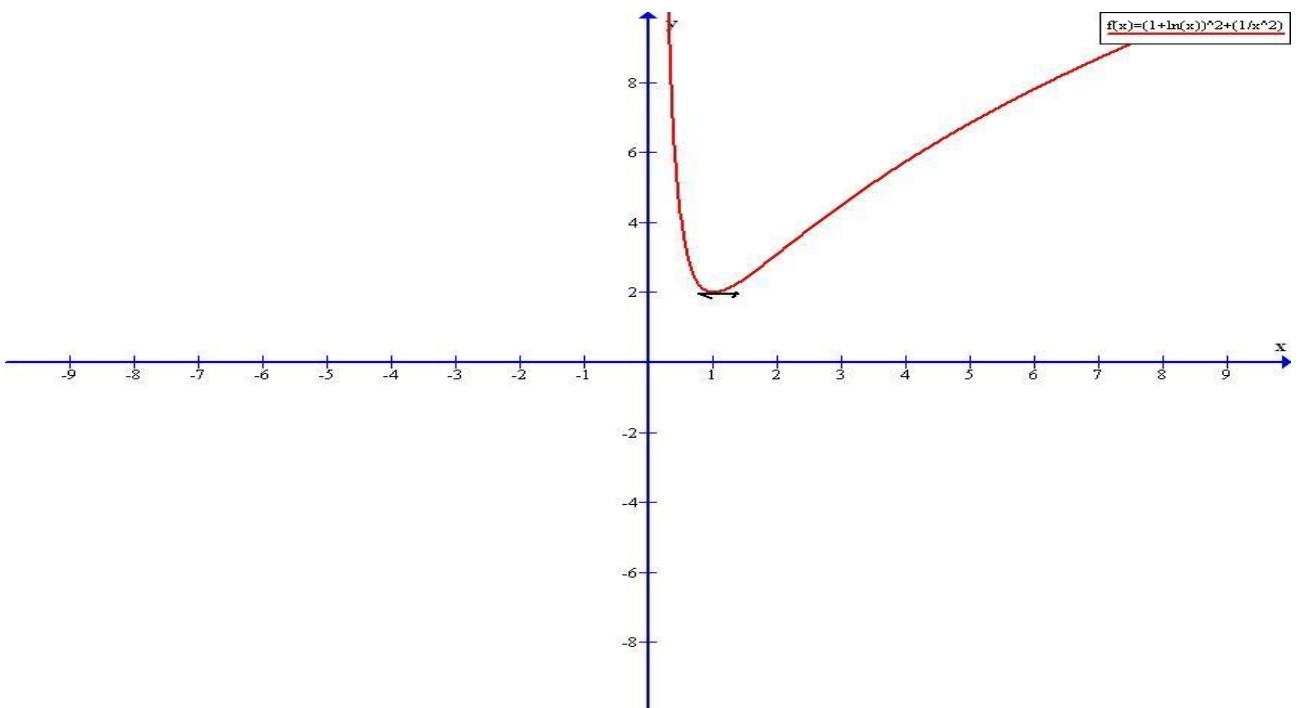
ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x) \geq 2$ لكل x من $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	ϕ	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(1) = 2$	$+\infty$

من خلال جدول التغيرات لدينا $f(1) = 2$ قيمة دنوية على المجال $]0,+\infty[$

$$\forall x \in]0,+\infty[; f(1) \leq f(x) \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \quad \text{و منه}$$

(4) أنشئ (γ_f) في معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (γ_f) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب)



الجزء الثالث :

أ- بين أن $H: x \rightarrow x \ln(x) + 1$ دالة أصلية للدالة $h: x \rightarrow \ln(x) + 1$ على $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن $I = e$

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[; H'(x) = (x \ln(x))' = x' \ln(x) + x \ln'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1 = h(x)$

و منه الدالة $H: x \rightarrow x \ln(x) + 1$ دالة أصلية للدالة $h: x \rightarrow \ln(x) + 1$ على $]0, +\infty[$;

$$I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = \int_1^e 1 dx + \int_1^e \ln(x) dx \quad \text{لدينا}$$

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \int_1^e \ln(x) dx$$

$$I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = \int_1^e 1 dx + \int_1^e \ln(x) dx = \int_1^e 1 dx + [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln(x)]_1^e = H(e) - H(1) \quad \text{إذن}$$

$$I = [x \ln(x)]_1^e = H(e) - H(1) = e \ln(e) - 1 \ln(1) = e \quad \text{أي أن :}$$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $J = 2e - 1$

$$\text{لنحسب التكامل} \quad J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx \quad \text{باستعمال المكاملة بالأجزاء}$$

$$\begin{cases} u(x) = 1 + \ln(x) \\ v'(x) = 1 + \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \ln(x) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

و منه :

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx = [x \ln(x) (1 + \ln(x))]_1^e - \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) (1 + \ln(x))]_1^e - [x \ln(x) - x]_1^e \\ &= [x \ln(x) (1 + \ln(x)) - x \ln(x) + x]_1^e = e \ln(e) (1 + \ln(e)) - e \ln(e) + e - [1 \ln(1) (1 + \ln(1)) - 1 \ln(1) + 1] \\ &= 2e - e + e - 1 = 2e - 1 \end{aligned}$$

ج- أحسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (γ_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$

نحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (γ_f) و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$

لدينا :

$$\int_1^e f(x) dx . u.A = \int_1^e \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx . u.A = \left[\int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \right] . u.A = \left(J + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \right) . cm^2$$

$$= \left(2e - 1 - \frac{1}{e} + 1 \right) . cm^2 = \left(2e - \frac{1}{e} \right) . cm^2 \quad \text{و منه}$$